第八章 数列

模块一 等差、等比数列问题

第 1 节 等差、等比数列的基本公式（★★）

内容提要

诸多等差、等比数列问题，都可以直接代通项公式、前 n 项和公式解决，所以熟悉基本公式非常重要.

1．等差数列的通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d=pn+q$，其中 $p=d$，$q=a_1-d$.

2．等差数列的前 n 项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=An^2+Bn$，其中 $A=\dfrac{d}{2}$，$B=a_1-\dfrac{d}{2}$.

3．等比数列的通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$.

4．等比数列的前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1\end{cases}$.

典型例题

类型Ⅰ：等差数列的通项公式与前 n 项和公式

【例 1】等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_6+a_7=18$，则 $\dfrac{1}{2}a_9-a_7$ 的值为（　　）

（A）-6　（B）-3　（C）3　（D）6

解析：已知条件和要求的量都容易用公式表示，直接套用公式翻译它们，

由题意，$a_2+a_6+a_7=a_1+d+a_1+5d+a_1+6d=3a_1+12d=18$，所以 $a_1+4d=6$ ①，

故 $\dfrac{1}{2}a_9-a_7=\dfrac{1}{2}(a_1+8d)-(a_1+6d)=-\dfrac{1}{2}a_1-2d=-\dfrac{1}{2}(a_1+4d)$，结合式①可得 $\dfrac{1}{2}a_9-a_7=-3$.

答案：B

【变式 1】已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1+a_3=6$，$S_5=S_3+11$，则 $\dfrac{S_n+8}{a_n-1}$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{11}{2}$　（B）$\dfrac{28}{5}$　（C）$\dfrac{17}{3}$　（D）$\dfrac{13}{2}$

解析：给的两个条件都容易用公式表示，故直接套用公式，即可求出 a_1 和 d，

因为 $\begin{cases}a_1+a_3=6\\ S_5=S_3+11\end{cases}$，所以 $\begin{cases}2a_1+2d=6\\ 5a_1+10d=3a_1+3d+11\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=2\\ d=1\end{cases}$，

a_n 和 S_n 就能求出来了，进而可将 $\dfrac{S_n+8}{a_n-1}$ 表示为关于 n 的单变量函数，研究最值，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n+1$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2+n+1)}{2}=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{2}$，

故 $\dfrac{S_n+8}{a_n-1}=\dfrac{\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{2}+8}{n+1-1}=\dfrac{n}{2}+\dfrac{8}{n}+\dfrac{3}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{8}{n}}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{n}{2}=\dfrac{8}{n}$，即 $n=4$ 时取等号，所以 $(\dfrac{S_n+8}{a_n-1})_{\min}=\dfrac{11}{2}$.

答案：A

【变式 2】已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为公差不为 0 的等差数列，且满足 $a_3=b_2$，$a_6=b_4$，则 $\dfrac{a_4-a_1}{b_3-b_2}=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）3

解析：观察目标式可发现分子分母容易化为公差，故先化简目标式，

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1，d_2，$d_1\ne 0$，$d_2\ne 0$，则 $\dfrac{a_4-a_1}{b_3-b_2}=\dfrac{3d_1}{d_2}$ ①，

所以只需找 d_1，d_2 的关系，故把已知条件用通项公式翻译，并消掉无关项，

由题意，$\begin{cases}a_3=b_2\\a_6=b_4\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a_1+2d_1=b_1+d_2\\a_1+5d_1=b_1+3d_2\end{cases}$，

两式作差消去 a_1，b_1 可得：$-3d_1=-2d_2$，所以 $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{2}{3}$，代入①得 $\dfrac{a_4-a_1}{b_3-b_2}=\dfrac{3d_1}{d_2}=2$.

答案：A

【总结】可以看出，基本公式的功能就很强大，在诸多等差数列问题中，用通项公式与前 n 项和公式翻译已知条件，求出 a_1 和 d，或找到它们的关系，即可解决问题.

类型Ⅱ：等比数列的通项公式与前 n 项和公式

【例 2】在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3=1$，$a_6+a_8=-32$，则 $\dfrac{a_{10}+a_{12}}{a_5+a_7}=$（　　）

（A）-8　　（B）16　　（C）32　　（D）-32

解析：题设条件与所求容易直接代公式，由题意，$\begin{cases}a_1+a_3=a_1+a_1q^2=a_1(1+q^2)=1\\a_6+a_8=a_1q^5+a_1q^7=a_1q^5(1+q^2)=-32\end{cases}$，

两式相除可得：$\dfrac{1}{q^5}=-\dfrac{1}{32}$，所以 $q^5=-32$，故 $\dfrac{a_{10}+a_{12}}{a_5+a_7}=\dfrac{a_1q^9+a_1q^{11}}{a_1q^4+a_1q^6}=\dfrac{a_1q^9(1+q^2)}{a_1q^4(1+q^2)}=q^5=-32$.

答案：D

【变式 1】（2022・全国乙卷）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则 $a_6=$（　　）

（A）14　　（B）12　　（C）6　　（D）3

解析：由已知条件容易建立关于 a_1 和 q 的方程组，求出 a_1 和 q，进而求得 a_6，

设$\{a_n\}$的公比为q，由题意，$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=168\\a_2-a_5=a_1q(1-q^3)=a_1q(1-q)(1+q+q^2)=42\end{cases}$，

两式相除得：$\dfrac{1}{q(1-q)}=4$，解得：$q=\dfrac{1}{2}$，所以$a_1=96$，故$a_6=96\times(\dfrac{1}{2})^5=3$.

答案：D

【变式 2】已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_4-2S_2=3$，则S_6-S_4的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　（B）3　（C）4　（D）12

解析：涉及到的下标较小，直接通过列项来翻译已知和所求较方便，

由题意，$S_4-2S_2=(a_1+a_2+a_3+a_4)-2(a_1+a_2)=a_3+a_4-a_1-a_2$

$=(a_1+a_2)q^2-(a_1+a_2)=(a_1+a_2)(q^2-1)=3$ ①，而$S_6-S_4=a_5+a_6=(a_1+a_2)q^4$ ②，

对比①②发现可由①反解出a_1+a_2，代入②消元，化为关于q的单变量表达式分析最值，

由①可得$a_1+a_2=\dfrac{3}{q^2-1}$，代入②得$S_6-S_4=\dfrac{3}{q^2-1}\cdot q^4=\dfrac{3(q^4-1)+3}{q^2-1}=\dfrac{3(q^2+1)(q^2-1)+3}{q^2-1}$

$=3(q^2+1)+\dfrac{3}{q^2-1}=3(q^2-1)+\dfrac{3}{q^2-1}+6$，

还需判断q^2-1的正负，才能用均值不等式求最值，可结合式①判断，

因为$\{a_n\}$是正项等比数列，所以$a_1+a_2>0$，结合式①可得$q^2-1>0$，

所以$S_6-S_4=3(q^2-1)+\dfrac{3}{q^2-1}+6\ge2\sqrt{3(q^2-1)\cdot\dfrac{3}{q^2-1}}+6=12$，当且仅当$3(q^2-1)=\dfrac{3}{q^2-1}$时等号成立，

此时，$q=\sqrt{2}$，故S_6-S_4的最小值为 12.

答案：D

【反思】单条件的等比数列问题中，可考虑翻译已知条件，建立变量间的关系，用于化简目标式.

【总结】从上面几道题可以看出，在诸多等比数列问题中，用通项公式和前n项和公式翻译已知条件，求出a_1和q，或找到它们的关系，即可解决问题.

类型III：等差、等比数列综合题

【例 3】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且a_2，a_3+2，a_8构成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=2^{a_n}+9$，记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，若$S_n\ge2023$，求正整数n的最小值.

解：（1）（条件容易直接代公式，求出d，即可求得通项）

设$\{a_n\}$的公差为d，因为a_2，a_3+2，a_8成等比数列，所以$(a_3+2)^2=a_2a_8$，

故$(a_1+2d+2)^2=(a_1+d)(a_1+7d)$，将$a_1=2$代入整理得：$d^2=4$，解得：$d=\pm2$，

（别忘了检验 $d=\pm 2$ 是否都满足题意，因为 $(a_3+2)^2=a_2a_8$ 只是 a_2，a_3+2，a_8 成等比数列的必要条件）

经检验，当 $d=-2$ 时，$a_2=a_1+d=0$，与题意不符，所以 $d=2$，故 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$.

（2）$b_n=2^{a_n}+9=2^{2n}+9=4^n+9$，（$4^n$ 是等比数列，可以求和，故对 4^n 和 9 分别求和再相加）

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=4^1+9+4^2+9+\cdots+4^n+9=(4^1+4^2+\cdots+4^n)+(9+9+\cdots+9)$

$=\dfrac{4\times(1-4^n)}{1-4}+9n=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}+9n=\dfrac{1}{3}\times 4^{n+1}+9n-\dfrac{4}{3}$，

（再看不等式 $S_n\geq 2023$ 的解集，直接解困难，但显然可发现 S_n 随 n 单调递增，故只需找临界情况）

$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{3}\times 4^{n+2}+9(n+1)-\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\times 4^{n+1}-9n+\dfrac{4}{3}=4^{n+1}+9>0$，所以 $S_{n+1}>S_n$，故 $\{S_n\}$ 是递增数列，

又 $S_5=1409<2023$，$S_6=5514>2023$，所以满足 $S_n\geq 2023$ 的最小的正整数 n 为 6.

【反思】求数列的最大最小项或 S_n 的最值，如果直接判断困难，基本都会优先考虑单调性.

【例 4】已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的部分项 a_{k_1}，a_{k_2}，a_{k_3}，…构成等比数列，且 $k_1=1$，$k_2=2$，$k_3=5$，则 $k_n=$______.

解析：已知条件容易代公式，从而找到 a_1 和 d 的关系，由题意，a_1，a_2，a_5 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_5$，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$，则 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，整理得：$d=2a_1$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=a_1+(n-1)\cdot 2a_1=(2n-1)a_1$，

已知等比数列 $\{a_{k_n}\}$ 前 3 项，足够求出通项 a_{k_n} 了（注意 a_{k_n} 是数列 $\{a_{k_n}\}$ 中的第 n 项），进而得到 k_n，

设等比数列 $\{a_{k_n}\}$ 的公比为 q，则 $q=\dfrac{a_{k_2}}{a_{k_1}}=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3a_1}{a_1}=3$，所以 $a_{k_n}=a_{k_1}\cdot q^{n-1}=a_1\cdot 3^{n-1}$，

又 $a_{k_n}=(2k_n-1)a_1$，所以 $a_1\cdot 3^{n-1}=(2k_n-1)a_1$，故 $k_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$.

答案： $\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

【反思】下标 k_n 看起来复杂，其实我们仅仅是将每一个条件用基本公式代入，答案就出来了.

强化训练

1.（2022·南昌模拟·★）《张丘建算经》卷上第二十二题为："今有女善织，日益功疾. 初日织五尺，今一月日织九匹三丈". 其意思为：今有一女子擅长织布，且从第二天起，每天比前一天多织相同量的布，若第一天织 5 尺布，现在一个月（按 30 天计）共织 390 尺布，则该女子最后一天织布的尺数为（　　）

（A）18　（B）20　（C）21　（D）25

2．（2022 • 南京模拟 • ★★）把 120 个面包全部分给 5 个人，使每人所得面包个数成等差数列，且较大的三份之和是较小的两份之和的 7 倍，则最小一份面包的个数为（　　）

（A）2　　（B）5　　（C）6　　（D）11

3．（2022 • 上海模拟 • ★★）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，若 $a_4-a_5=2a_6$，则 $\frac{S_2}{a_3}$ 的值为_____.

4．（2023 • 全国甲卷 • ★★）已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$（　　）

（A）7　　（B）9　　（C）15　　（D）20

5．（2022 • 北京模拟 • ★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 单调递增且满足 $a_1+a_8=6$，则 a_6 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,3)$　　（B）$(3,6)$　　（C）$(3,+\infty)$　　（D）$(6,+\infty)$

6．（2022 • 西安一模 • ★★★）设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，且 $a_4+a_7=2a_n$，则 $n=$_____.

7．（2022 • 广东模拟 • ★★★）已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列，若 $a_1=b_2=6$，$a_4+b_5=9$，则 a_7+b_8 的值是_____.

8．（2022·吉林模拟·★★★）若等比数列$\{a_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，且$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=90$，则$\{a_n\}$的前99项和$S_{99}=$______.

9．（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，设甲：$\{a_n\}$为等差数列，乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则（　　）

（A）甲是乙的充分条件但不是必要条件

（B）甲是乙的必要条件但不是充分条件

（C）甲是乙的充要条件

（D）甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

10．（2023·全国乙卷·★★★）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_2=11$，$S_{10}=40$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.

11．（2022·新高考Ⅱ卷·★★★）已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为公比为2的等比数列，且$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

（1）证明：$a_1=b_1$；

（2）求集合$\{k\mid b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\}$中元素的个数.